



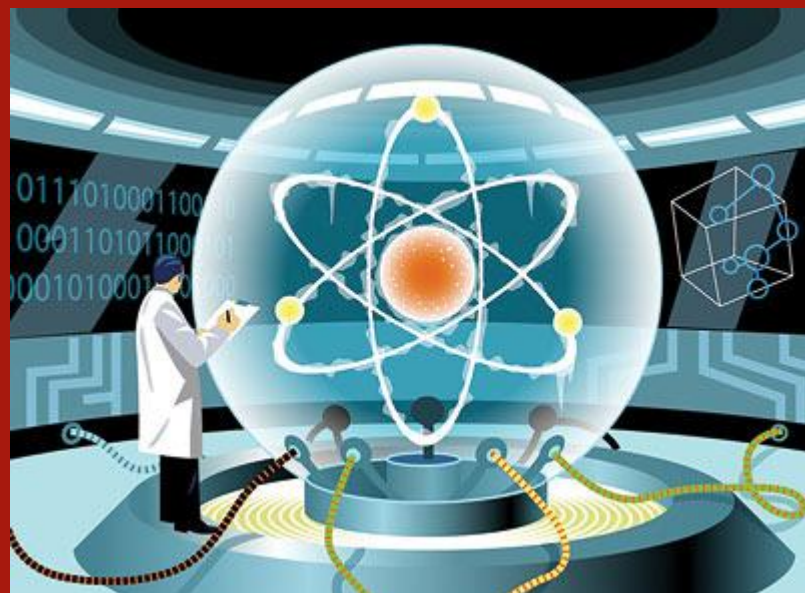
Politechnika Wrocławska

Podstawy fizyczne informatyki kwantowej

Arkadiusz Wójs

Instytut Fizyki
Politechnika Wrocławska

*Spotkanie rozliczeniowe
użytkowników KDM WCSS
2011*





Plan

Prawo Moore'a, współczesne (super)komputery

Problemy obliczeniowe o wykładniczej złożoności

Idea komputera kwantowego

Problem utraty informacji kwantowej

Wykorzystanie egzotycznych cząstek kwantowych

Kwantowy efekt Halla

Obliczenia numeryczne (na KDM WCSS)

Prawo Moore'a

Prawo empiryczne - obserwacja (1965), że liczba tranzystorów w układzie scalonym w kolejnych latach rośnie wykładniczo (podwaja się co 12-24 miesiące).

Przez analogię, prawo Moore'a stosuje się też do innych parametrów sprzętu komputerowego (pojemności dysków, wielkości pamięci, itp.)

Dla porównania:
średnie zużycie energii na osobę:

Bangladesz - 200W

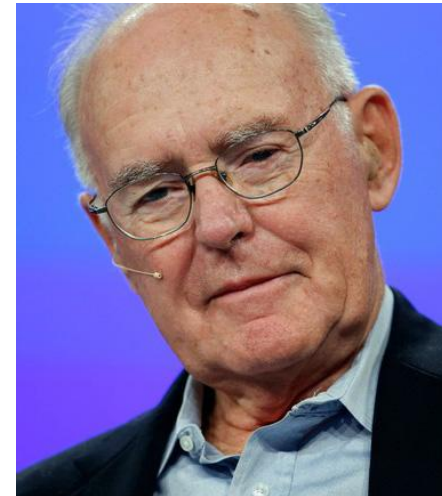
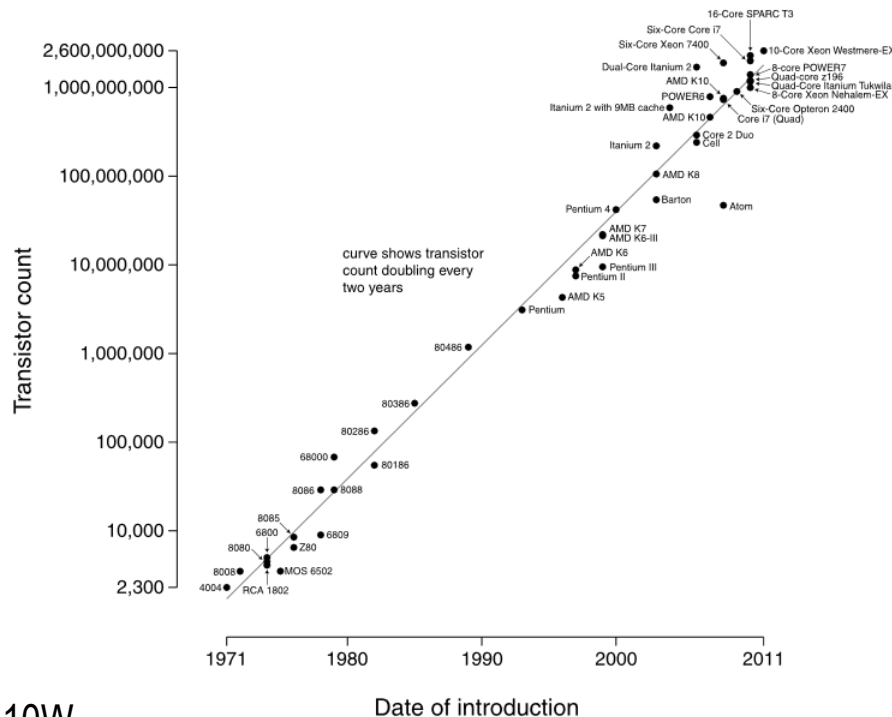
Polska - 3.3kW

USA - 12.7kW

Norwegia - 27.7kW

ludzka praca fizyczna ~ 10W

Microprocessor Transistor Counts 1971-2011 & Moore's Law



Gordon Earle Moore
(1929-)
współzałożyciel Intela



Współczesne procesory

Miniaturyzacja:

wymiar tranzystora 180nm
szerokość ścieżki 32nm
(=59 atomów krzemu)

Złożoność:

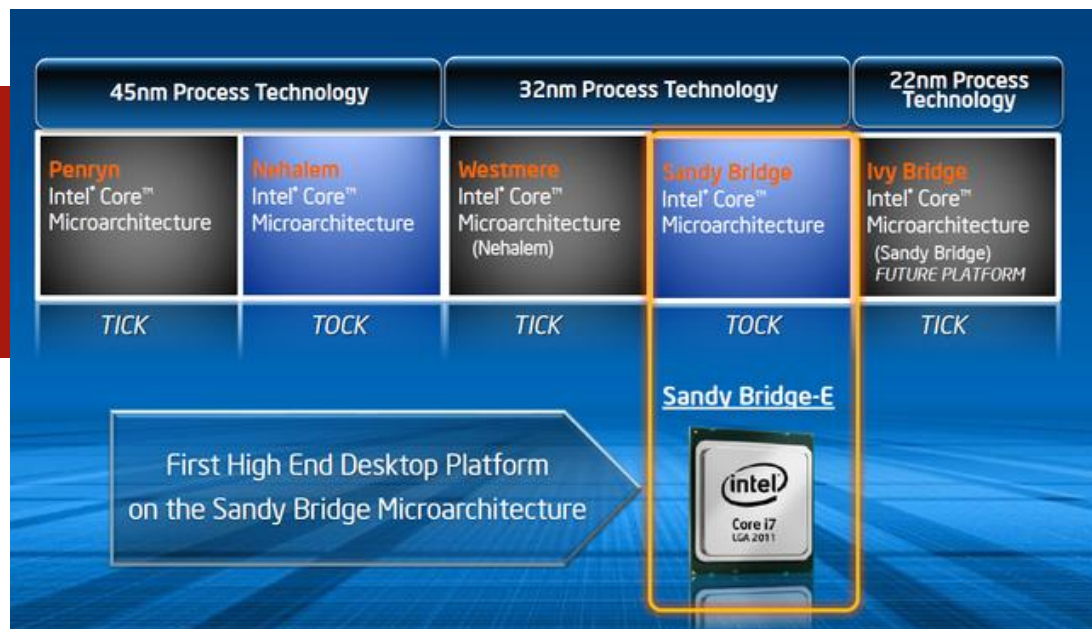
liczba tranzystorów >500M (>1B)

Szybkość:

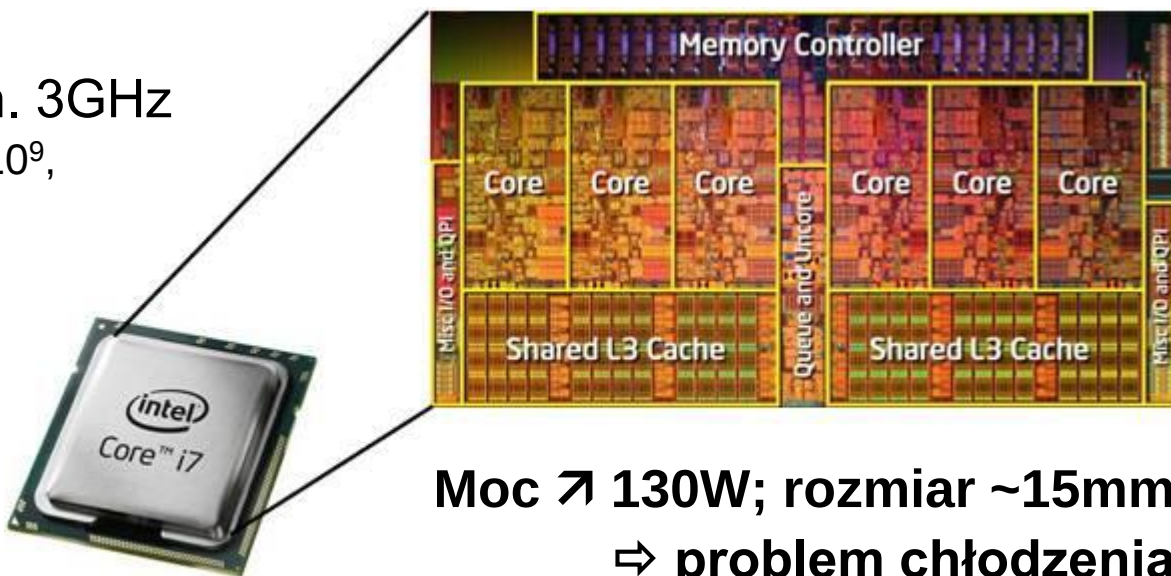
częstość taktowania min. 3GHz
(liczba operacji/sekundę = 3×10^9 ,
czas 1 operacji = 0.3×10^{-9} s
= 0.3 ns = 10 cm świetlnych)

Równoległość:

kilka rdzeni/wątków
(obecnie - 6/12; wkrótce:
22nm Knight's Corner - 50)

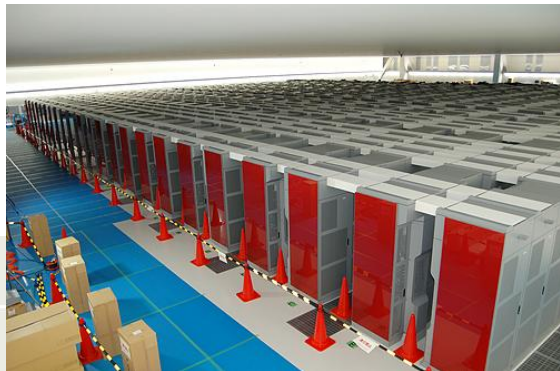


*Intel® Core™ i7-3960X (15M Cache, 3.30 GHz)
data wprowadzenia: IV kwartał 2011*

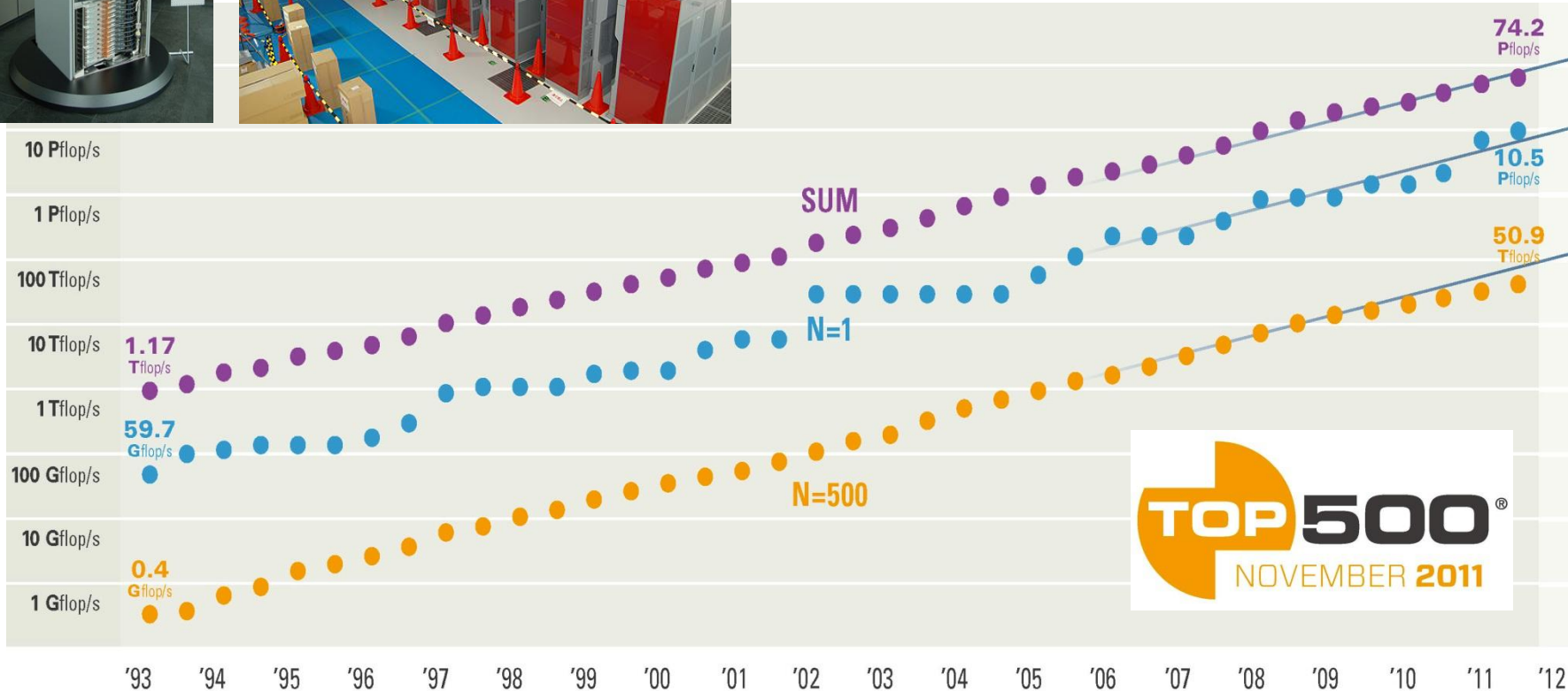


Moc ↗ 130W; rozmiar ~15mm
⇒ problem chłodzenia

Lista top-500 (superkomputery)



Kei		$R_{\max}$ (Pflop)	Pamięć (TB)	Liczba rdzeni	Moc (kW)
Japonia	Kei	10.5	1 410	705 024	12 660
Chiny	Tianhe	2.6	229	186 368	4 040
USA	Jaguar	1.8		224 162	6 950
Chiny	Nebulae	1.3		120 640	2 580
Japonia	Tsubame	1.2	90	73 278	1 399



Problem o dużej złożoności:

Rozkład liczby całkowitej na dzielniki pierwsze

Mnożenie pary liczb: $n = pq$ wymaga liczby operacji $o = \log_2 p \cdot \log_2 q$
 $\log_2 p = d_2 p$ = „długość” (liczba cyfr) p w przedstawieniu dwójkowym;
$$o \approx d_p \cdot d_q$$

Znalezienie dzielników – wymaga „nadwielomianowej” liczby operacji:

$o \approx n$ rośnie szybciej niż jakakolwiek potęga $\log n$

Liczba operacji dla najlepszego znanego algorytmu

(sito ciała liczbowego):

$$o \approx e^{1.9 \cdot d^{1/3} \ln d^{2/3}}$$

Algorytm kwantowy Shora (1994) –

$$o \approx n \sim d^3$$

(Są też inne problemy/algorytmy kwantowe)

Peter Williston Shor

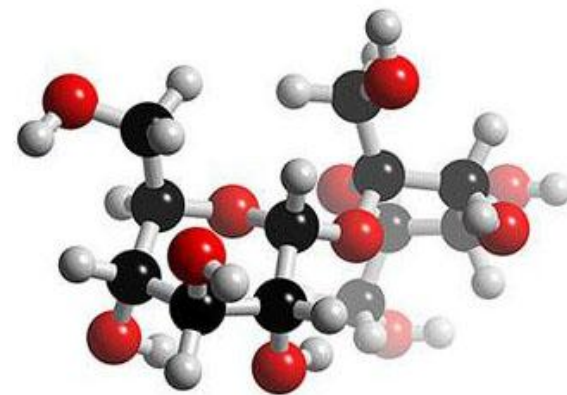
(1959-)



Inne problemy o dużej złożoności

Faktoryzacja liczb pierwszych jest istotna dla kryptografii.
Inne klasycznie nierozwiązywalne problemy:

Symulacje układów kwantowych
ogólna inżynieria materiałów
złożone cząsteczki (leki)
dynamika białek
życie...



świadomość...



Problem fizyki klasycznej jest efektywnie nierozwiązywalny
jeśli czas obliczeń jest rzędu czasu trwania zjawiska: $o \sim t$
(zamiast, np.: $o \sim \log t$) – np. chaos

Mechanika kwantowa

Dwa istotne nieintuicyjne elementy rzeczywistości

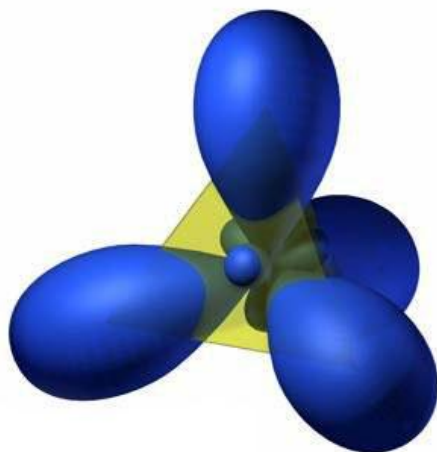
Superpozycja

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \dots$$



**Louis V. P. R.
de Broglie**
(1892-1987)

hybrydyzacja sp^3
różne momenty pędu
(0 lub $\hbar \approx 10^{-34} \text{Js}$)



Splątanie

Dwie cząstki, każda w stanie* 0 lub 1
Np. w takim stanach wyniki są losowe
i skorelowane: $|01\rangle + |10\rangle$



John Stewart Bell
(1928-1990)



Informacja kwantowa - qubit

bit (*binary digit*) – podstawowa jednostka informacji (klasycznej)

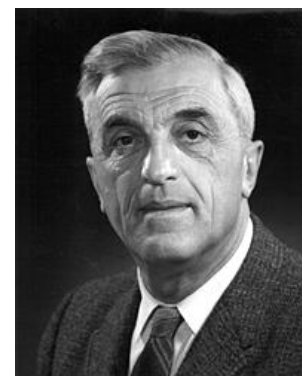
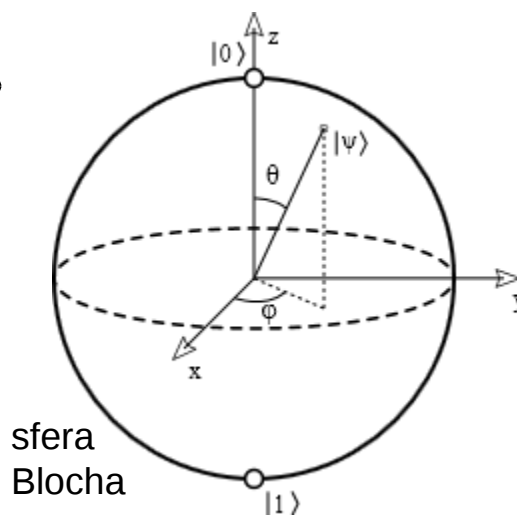
0 1



qubit (*quantum bit*) – jednostka informacji kwantowej

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

dowolna superpozycja pary
klasycznych stanów logicznych
(umownie: **0** i **1**)



Felix Bloch
(1905-1983)
szwajcarski fizyk

Obliczenia kwantowe

Informacja wejściowa (dane) – superpozycja stanów **0** i **1**

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

Obliczenie – proces fizyczny, przebiegający inaczej dla **0** i **1**
(ewolucja układu w czasie opisywana prawami mechaniki kwantowej)

$$|0\rangle \rightarrow |F\ 0\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow |F\ 1\rangle$$

Wynik – superpozycja (nie średnia!) wyników dla danych **0** i **1**

$$|\psi\rangle \rightarrow \alpha |F\ 0\rangle + \beta |F\ 1\rangle$$

Obliczenie równoległe na obu bitach (**0** i **1**)

Dla liczby K -bitowej – zrównoleglenie wykładnicze (2^K)



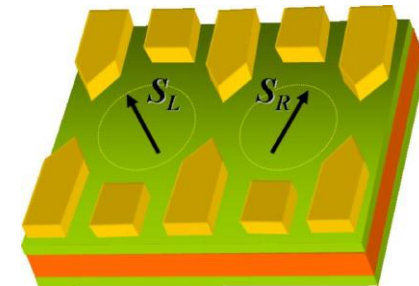
Problemy, przeszkody

1. Odczytanie wyniku = pomiar (probabilistyczny)

dla niektórych zagadnień konieczność powtarzania obliczenia

2. Nietrwałość informacji kwantowej

dekoherencja - spontaniczna utrata informacji
przez nieuniknione oddziaływanie z otoczeniem

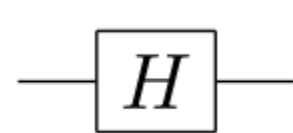


3. Fizyczna implementacja qubitów

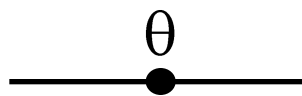
fotony, elektrony, jądra atomowe, atomy, kropki kwantowe, ...

4. Konstrukcja uniwersalnego zestawu bramek logicznych

np.: Hadamard + R_θ + CNOT

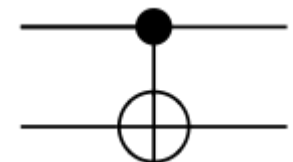


$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Cząstki o ułamkowej nieprzemiennej statystyce...



K. von Klitzing
Nobel 1985



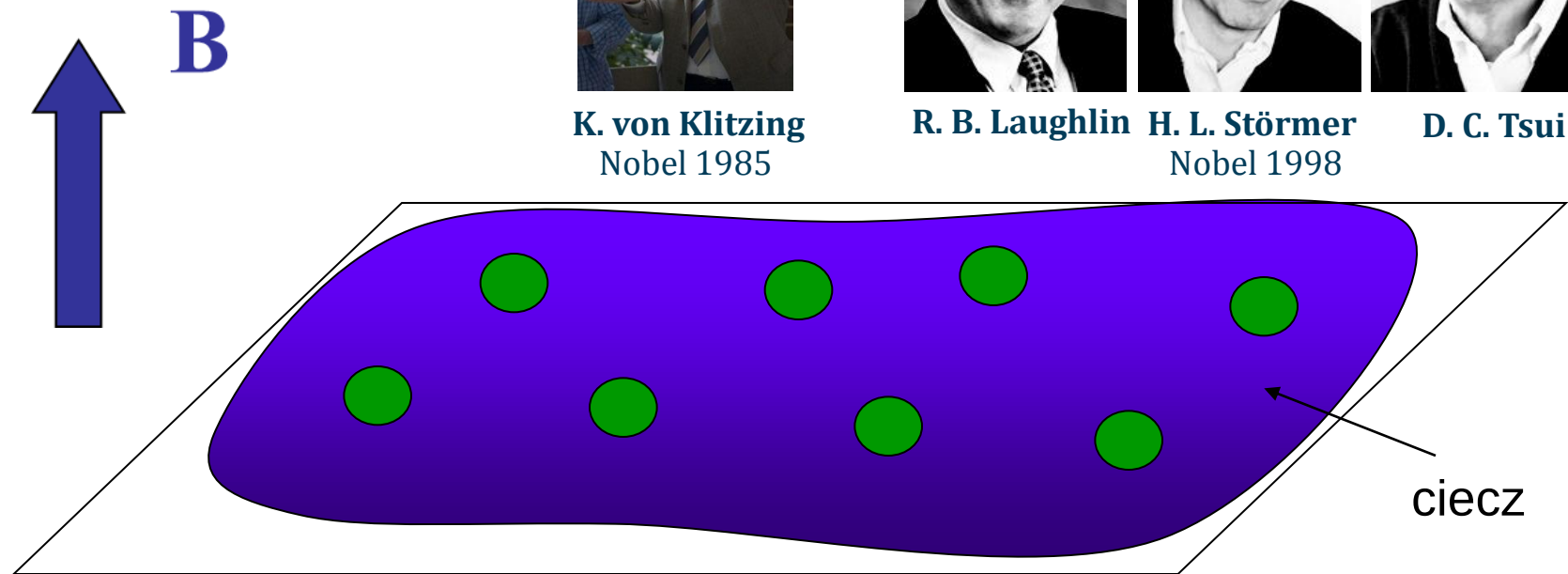
R. B. Laughlin



H. L. Störmer
Nobel 1998



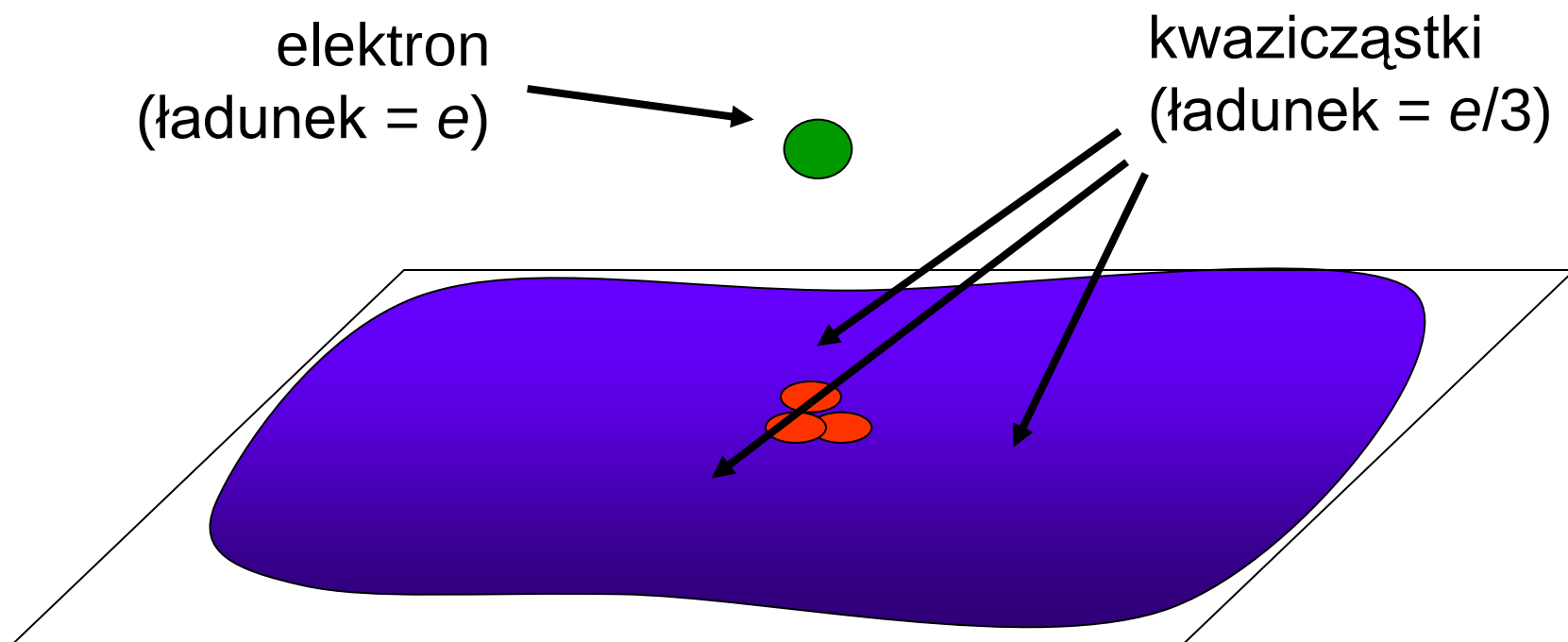
D. C. Tsui



Elektrony w dwóch wymiarach w silnym polu magnetycznym **B**

Przy odpowiedniej kombinacji natężenia pola **B** i koncentracji elektronowej (liczba/powierzchnia) gaz elektronów kondensuje do nowego stanu skupienia – **cieczy elektronowej**

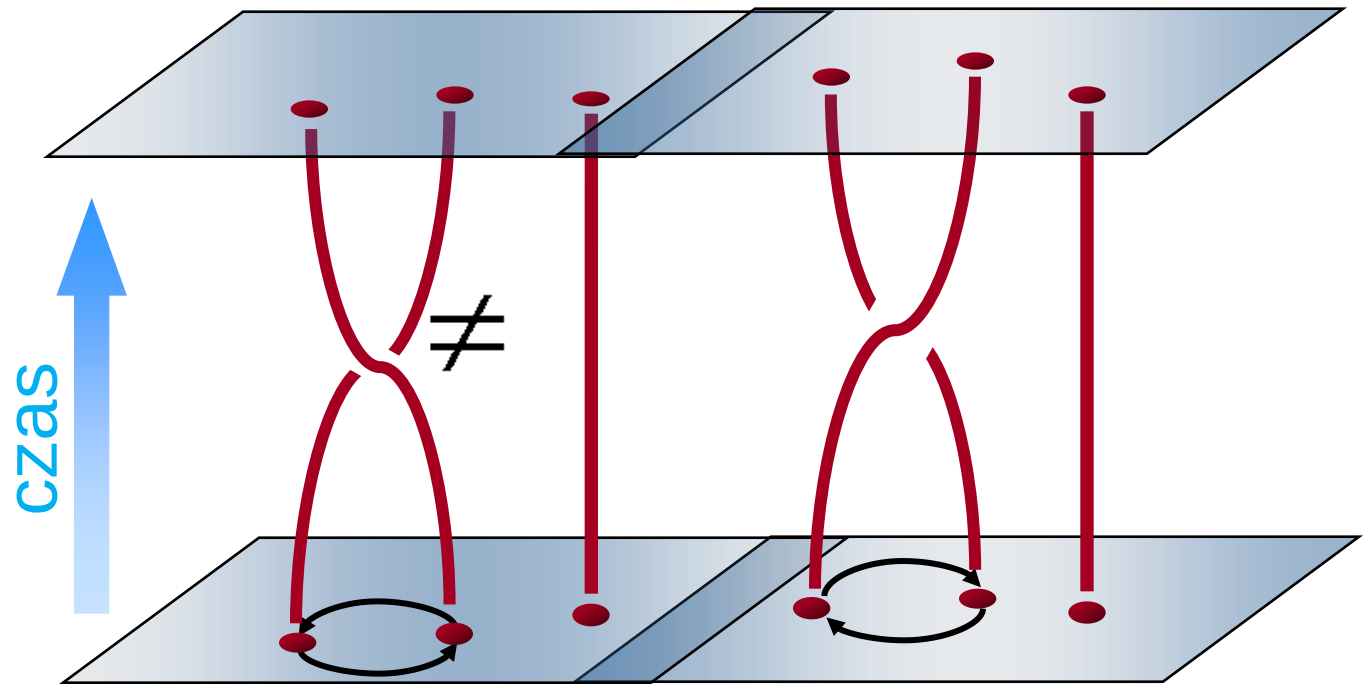
Cząstki o ułamkowej nieprzemiennej statystyce kwantowej



Elektron dodany do cieczy elektronowej „rozpada się” na kilka **ułamkowo naładowanych kwazicząstek**

(elektrony rozsuwają w cieczy się wzajemnie pozostawiając trzy „zgrubienia” obdarzone m.in. ładunkiem elektrycznym i poruszające się niezależnie od siebie)

Cząstki o ułamkowej nieprzemiennej statystyce kwantowej



Zamiana „w lewo” 2 wymiary (płaszczyzna) Zamiana „w prawo”

Linie świata cząstek w 2+1 wymiarach tworzą „**warkocze**”



Cząstki o ułamkowej nieprzemiennej statystyce kwantowej

Konwencjonalne cząstki kwantowe (np. elektrony):

zamiana pary cząstek miejscami

→ stan nieodróżnialny od wyjściowego

→ stan kwantowy (wektor) co najwyżej zmienia znak:

fermiony (-1; elektrony, kwarki) lub *bozony* (+1; fotony)

Kwazicząstki cieczy elektronowej:

zamiana pary miejscami

→ zmiana wektora stanu o $e^{i\phi}$ (*statystyka ułamkowa*), lub

→ zmiana wektora stanu na całkiem inny

(jeśli cząstki mają pamięć – *statystyka nieprzemiennej*)

Qubit w postaci określonego „nawinięcia” kwazicząstek (historii) – a nie ich położeń – jest odporny na utratę informacji!

Ułamkowy kwantowy efekt Halla (stan $\nu=5/2$)

5/2 FQHE:

2D gaz elektronowy, silne $\perp$ pole magnet.

Kwantowanie efektu Hall w $\nu=2+1/2=5/2$

Nieściśliwość (stan podstawowy z przerwą)

Funkcja falowa „Pfaffian”:

$$\Psi_{\text{Pf}} = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \text{Pf} \begin{pmatrix} z_i - z_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix}^{-1} \exp\left(-\sum_i |z_i|^2 / 4\right)$$

$$\text{gdzie } (\text{Pf})^2 \equiv \det: \text{Pf} \begin{pmatrix} z_i - z_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix}^{-1} = \mathcal{A} \prod_{\text{odd}} (z_i - z_{i+1})^{-1}$$

Konforemna teoria pola

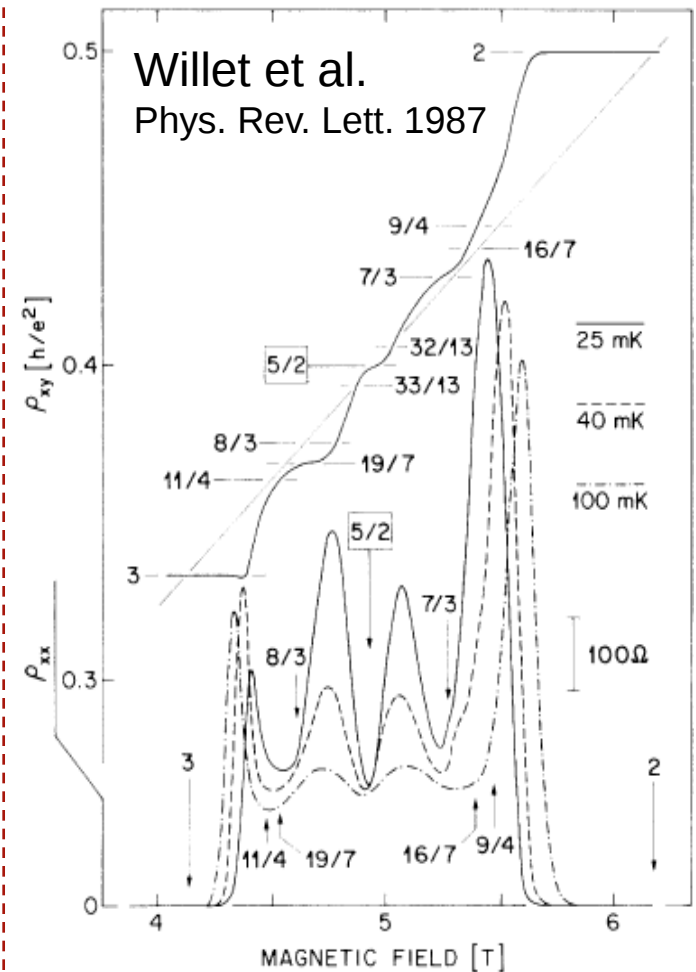
→ kwazidziury $e/4$, nieabelowa statystyka

2^{n-1} topologiczna degeneracja

dla $2n$ zlokalizowanych kwazidziur

wielowymiarowa reprezentacja grupy warkoczowej

Topologiczny komputer kwantowy





Oddziaływanie konfiguracji (CI)

Many-electron Hamiltonian

$$H = \sum_i \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{p}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 + \sum_{i < j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

High magnetic field $\rightarrow$
 large cyclotron gap
 fractional LL occupation

Model extended 2DEG by $N < \infty$
 $\rightarrow$ Haldane spherical geometry
 2D symmetry (rotations)
 radial field B
 (Dirac monopole $\Phi = 2Q$)
 LL = shell of $\ell = Q$
 LL degeneracy = $2Q + 1$

Single particle states:

monopole harmonics $|\ell, m\rangle$

Interaction:

e^2/r , chord distance
 (or model repulsions)

CI basis:

N -electron determinants

$$c_1^+ \cdots c_N^+ |\text{vac}\rangle$$

Hamiltonian (2- or 3-body), sparse

$$H_{2\text{-body}} = \sum_{ijkl} V_{ij;kl} c_i^+ c_j^+ c_k c_l$$

$$V_{ij;kl} = \sum_m C_{ij}^m C_{kl}^m V_m$$

Lanczos diagonalization $\rightarrow E(L)$



Zagnieżdżony Lanczos

Problem: Calculate energy spectrum vs angular momentum, $E(L)$

L on a sphere – interpreted as M (angular momentum, for charged excitations) or k (momentum, for neutral excitations) in real/planar geometry

1. For excited states – ghosts eliminated by full orthogonalization
2. Lanczos for H started with an L -eigenstate
3. Random initial L -eigenstate obtained from Lanczos for $\Lambda=L^+L^-$ (in $L_z=L$ subspace)
4. “Leakage” outside of L -subspace
by accumulation of errors during consecutive H -iterations
avoided by nesting Lanczos for Λ inside Lanczos for H
(more efficient than solving for $H+\beta L^2$)
5. Slow convergence of Lanczos for Λ
because of quadratic spectrum, $L^2=L(L+1)$ – untreated

Szybkie mnożenie macierz-wektor

Problem: Compute H (or Λ) times vector on the fly (*efficiently*)

Matrix-vector product = dominant cost (time/memory) in Lanczos

Storing matrix (despite sparsity) – infeasible (and unnecessary)

Computing matrix elements on the fly:

1. Generate & store basis:
index $i \rightarrow$ configuration $\mathbf{s}$; $\mathbf{s}(i)$ = binary, ordered
2. For each row i , generate matrix elements by action of H :
 $i \rightarrow \mathbf{s}(i) \rightarrow \mathbf{s}' = c^+ c^+ c c \mathbf{s}$ (or $c^+ c^+ c^+ c c c \mathbf{s}$, for 3-body)
3. Determine columns j from bisection $\mathbf{s}(j) = \mathbf{s}'$
4. Use partial knowledge of “inverse basis” $i(\mathbf{s})$ to speed bisection:
classify $\mathbf{s}$ by q leading bits, i.e.:
divide range of $\mathbf{s}$ into 2^q segments and store $i(\mathbf{s}/2^q)$
5. Use binary operations wherever possible



Maksymalne wymiary, prędkość

Memory:

2 Lanczos vectors = $2 \cdot \text{dim} \cdot 8\text{B}$ (double precision)

basis = $\text{dim} \cdot 8\text{B}$ (long integer)

inverse basis = $2^q \cdot 4\text{B}$ (integer; typically: $2^q \sim \text{dim}$)

Example:

$N=16$, $N_\phi=42$, $L_z=0$, $\text{dim}=2.6 \cdot 10^9 \rightarrow \text{memory}=63\text{GB}$, $\text{speed}=5.5\text{h/iteration}$

*Dual quad-core Intel Xeon E5530 2.40GHz (8 threads), Q1/2009



Publikacje

PRL **107**, 136802 (2011)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
23 SEPTEMBER 2011

Unpaired Composite Fermion, Topological Exciton, and Zero Mode

G. J. Sreejith,¹ A. Wójs,² and J. K. Jain^{1,3}

¹*Department of Physics, 104 Davey Lab, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania 16802, USA*

²*Institute of Physics, Wrocław University of Technology, 50-370 Wrocław, Poland*

³*School of Physics, Korea Institute for Advanced Study, Seoul 130-722, Korea*

(Received 2 June 2011; published 20 September 2011)

The paired state of composite fermions is expected to support two kinds of excitations: vortices and unpaired composite fermions. We construct an explicit microscopic description of the unpaired composite fermions, which we demonstrate to be accurate for a 3-body model interaction and, possibly, adiabatically connected to the Coulomb solution. This understanding reveals that an unpaired composite fermion carries with it a charge-neutral “topological” exciton, which, in turn, helps provide microscopic insight into the origin of zero modes, fusion rules, and energetics.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.107.136802](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.136802)

PACS numbers: 73.43.Cd, 71.10.Pm

We are grateful to Duncan Haldane, Maria Hermanns, Perla Kacman, Gunnar Möller, and especially Hans Hansson, for insightful discussions. We acknowledge financial support from the DOE under Grant No. DE-SC0005042 and EU Marie Curie Grant PCIG09-GA-2011-294186. Calculations have been carried out in Penn State Research Computing and Cyberinfrastructure and **Wrocław Centre for Networking and Supercomputing.**



Dziękuję za uwagę